

CHAPITRE II

MODELISATION ET SIMULATION D'UN MOTEUR ASYNCHRONES EN PRESENCE DES DEFAUTS ROTORIQUES

II.1. Introduction

Les machines asynchrones à rotor en court-circuit consomment plus de 40% de l'énergie électrique produite ; elles sont largement utilisées vu les avantages qu'elles présentent à savoir [10]:

- Leurs simplicités et leurs robustesses mécaniques,
- Leur fonctionnement sans génération d'étincelles d'où un entretien réduit,
- La normalisation des réseaux de distribution de l'énergie électrique se prête bien à l'utilisation directe de ces moteurs (tensions et fréquences constantes),
- Un prix de revient relativement faible.

Par ailleurs, La machine asynchrone, malgré ses qualités, peut présenter des défauts structurels, dans ce chapitre nous portons notre attention sur la rupture de barres rotoriques. Pour ce faire, il convient de développer un modèle qui tienne compte de la structure du rotor.

En effet, Pour étudier ces machines à induction on fait appel soit à la théorie du champ électromagnétique (équations de Maxwell), soit à la théorie des circuits électriques (lois de Kirchhoff) ; ou bien la méthode mixte combinant la théorie du champ électromagnétique et la théorie des circuits électriques [1].

II.2. Modèle multi enroulement d'une machine asynchrone

L'objectif est de procéder à un développement d'un modèle de la machine asynchrone qui mette en évidence l'influence des défauts étudiés sur les grandeurs mesurables de la machine, principalement les courants. Deux approches sont possibles, la première s'appuie sur la distribution des champs et des courants en tout point de la machine est permet de simuler son fonctionnement en régime des défauts .La seconde approche retenue ici consiste a interprété la machine du point de vue de la théorie des circuits pour faciliter la simulation et la mise au point les problèmes de rupture de barres et d'anneaux de court-circuit [4].

II.3. Calcul des inductances

II.3.1. Partie statorique

D'après le théorème d'ampère, la circulation du champ magnétique H crée par phase statorique en point quelconque peut être calculée. On peut écrire [2][4]:

$$\oint H dl = \frac{N_s I_s}{P} \quad (\text{II.1})$$

Partant de l'expression (II.1) l'induction maximale dans l'entrefer est égale :

$$B_{\max} = \frac{\mu_0 N_s I_s}{2.e.p} \quad (\text{II.2})$$

Avec :

$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Perméabilité magnétique du vide [H.m^{-1}]

La décomposition de l'induction en série de Fourier fournit le fondamental :

$$B_s(\theta) = \frac{2\mu_0 N_s I_s}{e.p.\pi} \cos(p.\theta) \quad (\text{II.3})$$

Le flux magnétique dans l'entrefer, par pôles, est obtenu par intégration de l'expression (II.3). Autour d'un intervalle polaire le long de la machine.

On écrit :

$$\Phi_s = \iint_s B_s ds = \int_0^t dz \int_{-\frac{\pi}{2p}}^{\frac{\pi}{2p}} B_s R.L.d\theta$$

On obtient :

$$\Phi_s = \frac{4}{\pi} \frac{N_s^2 \mu_0}{e.p^2} R.L.I_s \quad (\text{II.4})$$

Dou le flux principale de l'enroulement statorique :

$$\Psi_{sp} = N_s \cdot \Phi_s = N_s \cdot I_s \frac{2}{\pi} \frac{N_s \mu_0 R.L}{e.p} \int_{-\frac{\pi}{2p}}^{\frac{\pi}{2p}} \cos(p.\theta).d\theta$$

Donc : $\Psi_{sp} = L_{sp} \cdot I_s \quad (\text{II.5})$

L'inductance principale de la phase « n » statorique d'après (II.6) :

$$L_{sp} = 4\mu_0 \frac{N_s^2}{e.p^2} R.L \quad (\text{II.6})$$

Le flux de fuites est donné par :

$$\Phi_{fs} = L_{fs} \cdot I_s \quad (\text{II.7})$$

L'inductance cyclique L_{sc} :

$$L_{sc} = \frac{3}{2} L_{sp} + L_{sf} = \frac{6}{\pi} \mu_0 \frac{N_s^2}{ep^2} R.L + L_{sf} \quad (\text{II.8})$$

Du fait que les enroulements statorique sont symétriques (décalés d'un angle de $\frac{2\pi}{3}$).

Les inductances mutuelles propres entre les trois phases s'écrivant:

$$\begin{cases} L_{ab} = L_{sp} \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{L_{sp}}{2} \\ L_{ac} = L_{sp} \cos(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{L_{sp}}{2} \\ L_{bc} = L_{sp} \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{L_{sp}}{2} \end{cases}$$

Avec :

$$M_s = -\frac{L_{sp}}{2} = \begin{cases} L_{ab} = L_{ba} \\ L_{ac} = L_{ca} \\ L_{bc} = L_{cb} \end{cases}$$

II.3.2. Partie rotorique

La Figure (2.1) est représenté circuit électrique d'une cage rotorique :

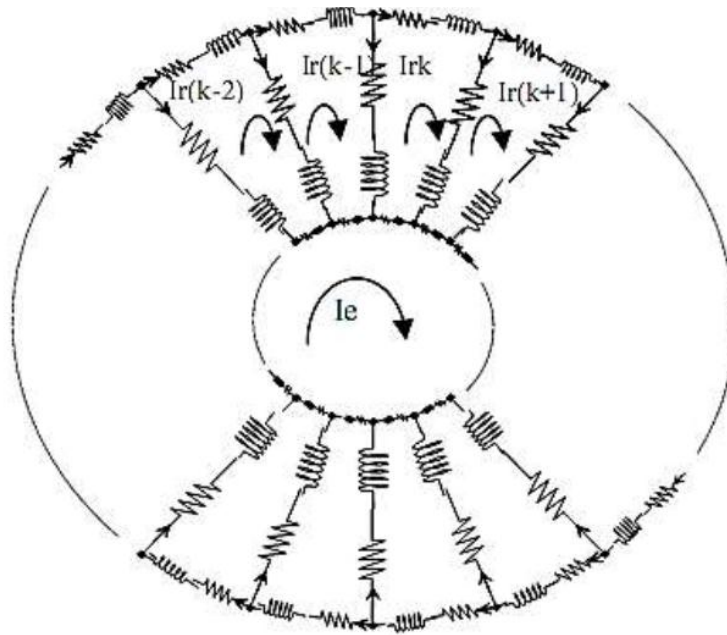


Figure 2.1 : Circuit électrique équivalent d'une cage.

Le rotor est décomposé en circuits élémentaires (Figure 2.1) constitués de deux barres et de deux portions d'anneaux les reliant à chaque extrémité. Chaque maille rotorique est considérée comme une bobine à une spire, parcourue par un courant I_{rk} est le siège d'un flux principal exprimé par [11]:

$$\Phi_{rpk} = \int_0^{\frac{2\pi}{N_r}} B_{2rk} \cdot R \cdot L \cdot d\theta$$

$$\Phi_{rpk} = \frac{(N_r - 1)}{N_r^2} \mu_0 \frac{2\pi \cdot R \cdot L}{e} I_{rk} \quad (\text{II.9})$$

La Figure (2.2) représente la forme d'onde de l'induction produit par la maille rotorique k.

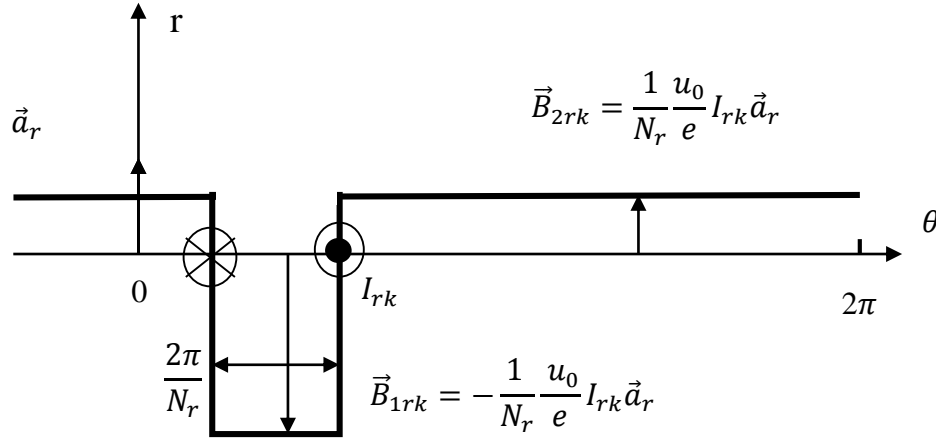


Figure 2.2 : Induction magnétique produite par une maille du rotor nombre de barres rotorique.

B_k : Induction magnétique dans l'entrefer produit par une maille rotorique « k »

Partant de la répartition de l'induction magnétique (Figure 2.2), l'inductance principale d'une maille rotorique ainsi que la mutuelle entre deux mailles de la manière suivant:

$$L_{rp} = \frac{(N_r - 1)}{N_r^2} \mu_0 \frac{2\pi \cdot R \cdot L}{e} \quad (\text{II.10})$$

L'inductance principale totale de la k^{eme} maille rotorique est égale à la somme de son inductance principale, des inductances de fuit des deux barres et des inductances de fuite des deux portions d'anneaux de court-circuit refermant la maille k donc l'expression est donnée:

$$L_{rr} = L_{rp} + 2.L_p + 2.L_e \quad (\text{II.11})$$

La maille rotorique est magnétiquement couplée par l'intermédiaire du flux rotorique d'entrefer.

Le flux traversant la j^{eme} maille, produit par le courant I_{rk} circulant dans la maille k est donné par :

$$\Phi_{rjrk} = \int_0^t dz \int_{j\alpha}^{(j+1)\alpha} B_{2rk} R \cdot L \cdot d\theta$$

$$\Phi_{rjrk} = \int_0^t dz \int \left(-\frac{\mu_0}{N_r e} I_{rk} R \cdot L \right) d\theta \quad (\text{II.12})$$

L'inductance mutuelle entre mailles rotorique non adjacentes est exprimée par la relation suivante:

$$M_{rr} = -\frac{1}{N_r^2} \frac{u_0}{e} 2.\pi.l.R \quad (\text{II.13})$$

L'inductance mutuelle entre mailles rotorique adjacentes est donné par :

$$\begin{aligned} L_{(k+1)k} &= -\frac{\mu_0}{N_r^2.e} 2.\pi.L.R - L_{b(k+1)} \\ L_{(k-1)k} &= -\frac{\mu_0}{N_r^2.e} 2.\pi.L.R - L_{b(k-1)} \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

II.3.3. Mutuelle inductance entre stator et rotor

La transformation dans le repère lié au rotor de l'équation (II.15), donne [2] :

$$B_{msr} = \frac{2\mu_0 N_s . I_s}{e.p.\pi} \cos\left(p\theta - n\frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{II.15})$$

Avec : $n = (1, 2, 3)$

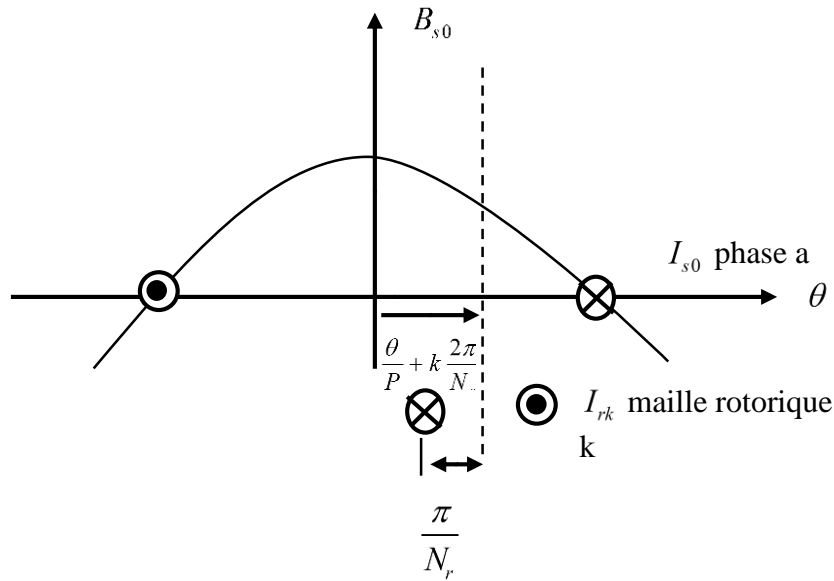


Figure 2.3 : Position de la maille rotorique K, par rapport à la bobine.

L'induction produit par la bobine statorique de la phase n induit dans la maille rotorique k le flux:

$$\Phi_{smrk} = -\frac{\mu_0 N_s . I_{sm}}{e.p.\pi} 2.L.R \frac{1}{p} \left[\sin\left(p\theta - n\frac{2\pi}{3}\right) \right]_{\frac{\theta}{p} + k\frac{2\pi}{Nr} - \frac{\pi}{Nr}}^{\frac{\theta}{p} + k\frac{2\pi}{Nr} + \frac{\pi}{Nr}} \quad (\text{II.16})$$

L'inductance mutuelle entre la phase "n" du stator et la k^{eme} maille rotorique est donnée donc par :

$$\begin{aligned} M_{rkn} &= -M_{sr} \cos\left(p\theta - n\frac{2\pi}{3} + k\alpha\right) \\ M_{sr} &= \frac{4\mu_0}{\pi.e.p^2} N_s L.R \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

$\alpha = p \frac{2\pi}{N_r}$: L'angle électrique entre deux mailles rotorique talque

De même, les inductances mutuelles entre la k^{eme} maille et les phases "b" et "c", sont exprimées par:

$$\begin{cases} M_{rka} = M_{sr} \cos(p\theta + k\alpha) \\ M_{rkb} = M_{sr} \cos\left(p\theta + k\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_{rkc} = M_{sr} \cos\left(p\theta + k\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

II.4. Mise en équations

Le but de la mise en équations est d'effectuer une simulation numérique. Nous Recherchons donc, l'ensemble des équations différentielles indépendants définissant le modèle de la machine

II.4.1. Equations statorique

Les équations de tension et du flux statorique sont [1][8] :

$$\begin{cases} [V_{abc}] = [R_s] [I_{abc}] + \frac{d}{dt} [\Phi_{abc}] \\ [\Phi_{abc}] = [L_s] [I_{abc}] + [M_{sr}] [I_{rk}] \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

Avec :

$$\begin{cases} [V_{abc}] = [V_a \ V_b \ V_c]^t \\ [I_{abc}] = [I_a \ I_b \ I_c]^t \\ [\Phi_{abc}] = [\Phi_a \ \Phi_b \ \Phi_c]^t \end{cases}$$

La matrice des résistances statoriques est :

$$[R_s] = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix}$$

La matrice d'inductance statorique s'écrit :

$$[L_s] = \begin{bmatrix} L_{sp} + L_{sf} & M_s & M_s \\ M_s & L_{sp} + L_{sf} & M_s \\ M_s & M_s & L_{sp} + L_{sf} \end{bmatrix}$$

La matrice des inductances mutuelles entre phases statoriques et mailles rotoriques s'écrit :

$$[M_{sr}] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & -M_{sr} \cos(\theta_r + k\alpha) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -M_{sr} (\theta_r + k\alpha - \frac{2\pi}{3}) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -M_{sr} (\theta_r + k\alpha - \frac{4\pi}{3}) & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

II.4.2. Equations rotorique

Le modèle multi-enroulement, permet de mieux se rapprocher de la structure réelle de La cage rotorique. Le rotor est assimilé à un enroulement polyphasé de (N_r+1) mailles, chaque maille est constituée de deux barres adjacentes et de deux portions des deux anneaux de court-circuit. La Figure (2.4) illustre la modélisation du rotor par son schéma électrique équivalent.

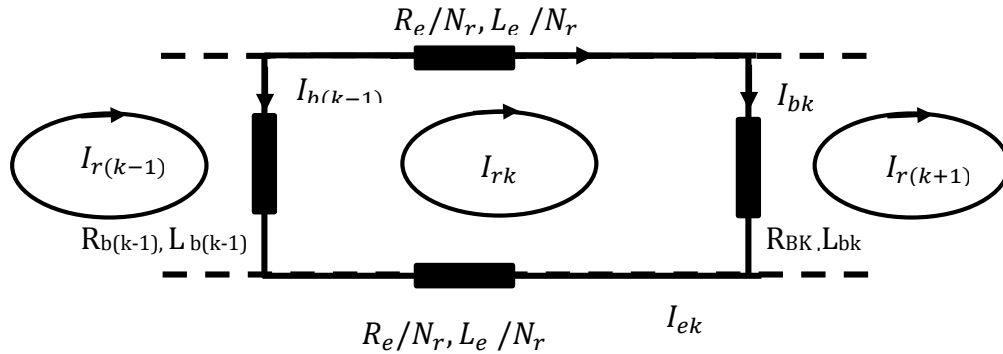


Figure 2.4 : Schéma électrique équivalent des mailles rotorique.

Sachant que :

Pour le nœud n° 1 :

$$I_{bk} = I_{rk} - I_{r(k+1)} \quad (\text{II.19})$$

Pour le nœud n° 2 :

$$I_{b(k-1)} = I_{r(k-1)} - I_{rk} \quad (\text{II.20})$$

Ainsi que l'équation :

$$I_{rk} - I_e = I_{ek} \quad (\text{II.21})$$

L'équation électrique relative à la maille k peut être écrite sous la forme :

$$0 = \frac{R_e}{N_r} I_{rk} - R_{b(k-1)} [I_{r(k-1)} - I_{rk}] + \frac{R_e}{N_r} [I_{rk} - I_e] + R_{bk} [I_{rk} - I_{r(k+1)}] + \frac{d}{dt} \Phi_{rk}$$

En remplaçant les formules (II.13) et (II.14) dans l'équation (II.15), l'équation électrique relative à la maille k devient :

$$0 = \frac{R_e}{N_r} I_{rk} - R_{b(k-1)} I_{b(k-1)} + \frac{R_e}{N_r} [I_{rk} - I_e] + R_{bk} I_{bk} + \frac{d}{dt} \Phi_{rk}$$

Le flux totalisé Φ_{rk} pour un circuit élémentaire k est composé de la somme des termes suivants :

- le flux principal :

$$\Phi_{rp} = L_{rp} I_{rk}$$

- Le flux mutuel avec les autres mailles du rotor :

$$\Phi_{rr} = M_{rr} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N_r-1} I_{rj}$$

- Le flux mutuel avec le stator :

$$\Phi_{sr} = M_{sr} \left[\cos(\theta_r + k\alpha) : \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3} + k\alpha) : \cos(\theta_r - \frac{4\pi}{3} + k\alpha) \right]$$

L'équation (2-21) devient donc:

$$0 = R_{bk} I_{r(k-1)} + \left(2 \frac{R_e}{N_r} + R_{b(k-1)} + R_{bk} \right) I_{rk} - R_{bk} I_{r(k+1)} - \frac{R_e}{N_r} I_e + \frac{d\Phi_{rk}}{dt}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Phi_{rk} = & \left(L_{rp} + \frac{2L_e}{N_r} + 2L_b \right) I_{rk} - M_{rr} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N_r-1} I_{rj} - L_b (I_{r(k-1)} + I_{r(k+1)}) - \frac{L_e}{N_r} I_e - \\ & M_{sr} \left[\cos(\theta_r + ka) : \cos(\theta_r + ka - \frac{2\pi}{3}) : \cos(\theta_r + ka - \frac{4\pi}{3}) \right] [I_{abc}] \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Avec : $k = 0, \dots, N_r-1$

Il faut compléter le système d'équations des circuits du rotor par celle de l'anneau de Court-circuit:

$$(L_e / N_r) \sum_{K=0}^{N_r-1} \frac{dl_{rk}}{dt} - L_e \frac{dl_e}{dt} - [R_e I_e - R_e / N_r \sum_{K=0}^{N_r-1} I_{rk}] = 0$$

De la même façon on utilise les équations de I_{bK} et I_{ek} et on trouve :

$$\frac{R_e}{N_r} \sum_{K=1}^{N_r} I_{r(k)} + \frac{L_e}{N_r} \sum_{k=1}^{N_r} \frac{d}{dt} I_{r(k)} - I_e \frac{d}{dt} I_e - R_e I_e = 0 \quad (\text{II.23})$$

II.4.3. Equation d'état de la machine

Le système est mis sous la forme canonique suivante :

$$[V] = [R][I] + [L] \frac{d}{dt} [I] + \frac{d[L]}{dt} [I] \quad (\text{II.24})$$

Avec :

$[V] = [v_a v_b v_c : 0 \ 0 \dots 0 : 0]^t$: Le vecteur global des tensions $((N_r+4) \times 1)$. Il contient les trois tensions statoriques et les N_r tensions des mailles rotoriques, ainsi que la tension de l'anneau de court-circuit.

$[I] = [i_a i_b i_c : i_{r0} i_{r1} \dots i_{rk} \dots i_{r(N_r-1)} : i_e]^t$: Le vecteur global des courants $((N_r+4) \times 1)$. Il contient les trois courants statoriques et les N_r courants des mailles rotoriques, ainsi que le courant de l'anneau de court-circuit.

La matrice globale des résistances est :

$$[R] = \begin{bmatrix} [R_s]_{3 \times 3} & : & [0]_{3 \times (N_r+1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ [0]_{(N_r+1) \times 3} & : & [R_s]_{(N_r+1) \times (N_r+1)} \end{bmatrix}$$

La matrice globale des inductances est donnée par :

$$[L] = \begin{bmatrix} [L_s]_{3 \times 3} & : & [M_{sr}]_{3 \times (N_r+1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ [M_{sr}]_{(N_r+1) \times 3} & : & [L_s]_{(N_r+1) \times (N_r+1)} \end{bmatrix}$$

La matrice des résistances rotoriques :

$$[R_r] = \begin{bmatrix} R_{b0} + R_{b(N_r-1)} + 2\frac{R_e}{N_r} & -R_{b0} & .. & 0 & .. & .. & -R_{b(N_r-1)} & : & \frac{R_e}{N_r} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & : & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & : & .. \\ 0 & .. & -R_{b(k-1)} & R_{bk} + R_{b(k-1)} + 2\frac{R_e}{N_r} & -R_{bk} & .. & 0 & : & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & : & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & : & .. \\ -R_{b(N_r-1)} & .. & 0 & .. & .. & -R_{b(N_r-2)} & R_{b(N_r-1)} + R_{b(N_r-2)} + \frac{R_e}{N_r} & : & \frac{R_e}{N_r} \\ & & & & & & & : & \\ \frac{R_e}{N_r} & .. & .. & .. & .. & .. & \frac{R_e}{N_r} & : & R_e \end{bmatrix}$$

La matrice des inductances rotoriques :

$$[L_r] = \begin{bmatrix} L_{rp} + 2L_b + 2\frac{L_e}{N_r} & M_{rr} - L_b & .. & .. & M_{rr} & .. & M_{rr} - L_b & : & -\frac{L_e}{N_r} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & : & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & : & .. \\ M_{rr} - L_b & .. & M_{rr} - L_b & L_{rp} + 2L_b + 2\frac{L_e}{N_r} & M_{rr} - L_b & M_{rr} & .. & : & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & : & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & : & .. \\ M_{rr} - L_b & .. & M_{rr} & .. & .. & M_{rr} - L_b & L_{rp} + 2L_p + 2\frac{L_e}{N_r} & : & -\frac{L_e}{N_r} \\ & & & & & & & : & \\ -\frac{L_e}{N_r} & .. & .. & .. & .. & .. & -\frac{L_e}{N_r} & : & L_e \end{bmatrix}$$

La dérivée de la matrice globale des inductances est :

$$\frac{d[L]}{dt} = \begin{bmatrix} [0] & \frac{d[M_{sr}]}{dt} \\ \frac{d[M_{sr}]^t}{dt} & [0] \end{bmatrix}$$

II.4.4. Transformation de Park

Pour obtenir un système d'équations à coefficients constants, il est usuel de faire appel à une transformation dite transformation de Park. Elle permet le passage du repère réel triphasé (a, b, c) au repère d'axe (h, d, q).

Cette transformation ainsi, pour l'objectif de rendre les inductances mutuelles du modèle indépendantes de l'angle de rotation. Où d est l'axe directe, q l'axe en quadrature et o l'axe homopolaire (axe supplémentaire) comme le montre la (Figure.2.5).

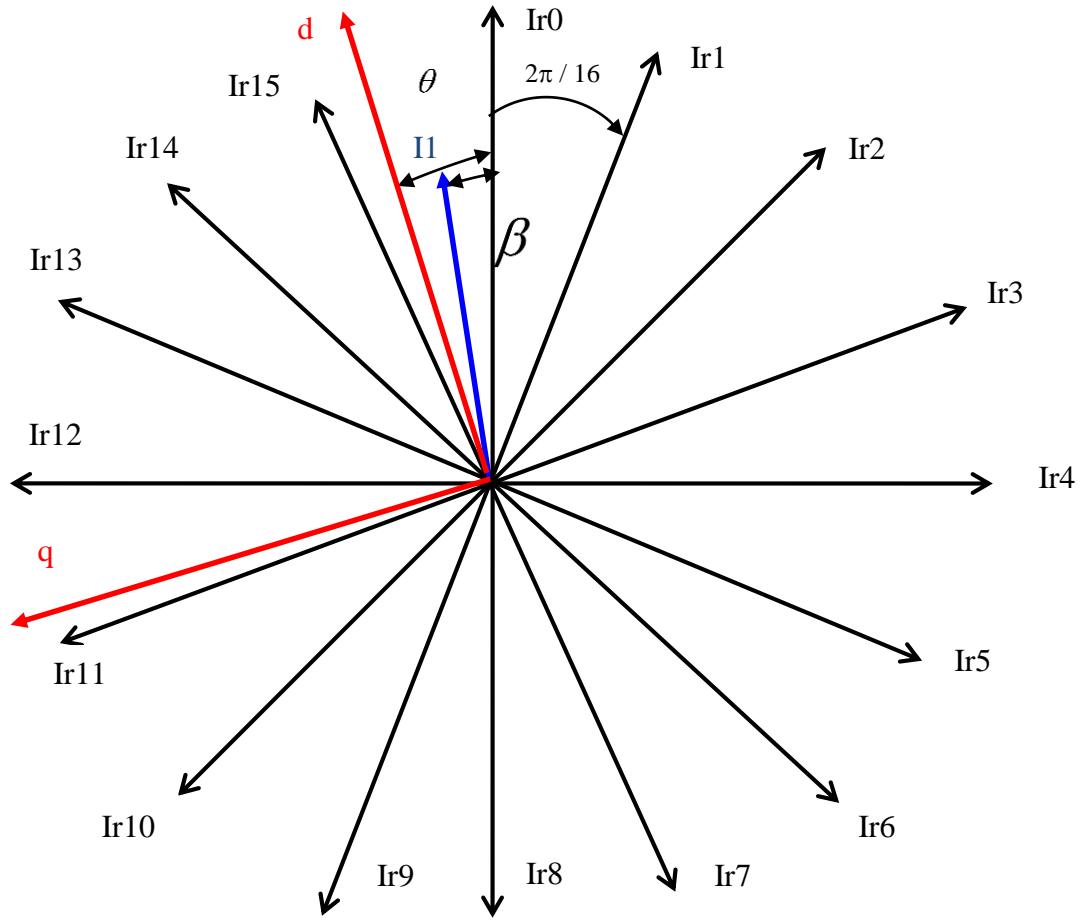


Figure 2.5 : Projection du modèle multi enroulement sur le modèle biphasé.

La matrice de Park modifiée est définie par :

$$[P(\theta)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \theta & -\sin \theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

La dérivée de la matrice de Park est :

$$\frac{d}{dt}[P(\theta)] = -\omega \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ 0 & \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

On définit la matrice globale de Park de dimension $(N_r + 4) \times (N_r + 4)$ comme :

$$[T] = \begin{bmatrix} [P(\theta)] & \vdots & [0] \\ \dots & \dots & \dots \\ [0]^T & \vdots & [1]_{(N_r+1) \times (N_r+1)} \end{bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

Sachant que:

$[V] = [T][V_{tr}]$ Avec : $[V_{tr}] = [V_{0s} \ V_{ds} \ V_{qs} \ : \ 0 \ 0 \dots \dots 0 \ : \ 0]^t$, le vecteur global des tensions de dimensions $(N_r + 4)$, il contient les tensions statorique dans le repère de Park et les N_r tensions des mailles rotorique, ainsi que la tension de l'anneau de court-circuit.

$[I] = [T][I_{tr}]$ Avec : $[I_{tr}] = [i_{0s} \ i_{ds} \ i_{qs} \ : \ i_{r0} \dots i_{rk} \dots i_{r(N_r-1)} \ : \ i_e]^t$ le vecteur global des courants de dimensions $(N_r + 4)$.

L'équation (II.24) devient :

$$\begin{aligned} [T] \cdot [V_{tr}] &= [R] \cdot [T] \cdot [I_{tr}] + \frac{d[L]}{dt} [T] [I_{tr}] + [L] \frac{d[T]}{dt} [I_{tr}] + [L] \cdot [T] \frac{d[I_{tr}]}{dx} \\ [V_{tr}] &= \left([T]^{-1} [R] [T] + [T]^{-1} \frac{d[L]}{dt} [T] + [T]^{-1} [L] \frac{d[T]}{dt} \right) [I_{tr}] + [T]^{-1} [L] [T] \frac{d[I_{tr}]}{dt} \\ [V_{tr}] &= (A + B + C) [I_{tr}] + D \frac{d[I_{tr}]}{dt} \end{aligned}$$

Avec les termes A, B, C, D donnés par :

$$A = [T]^{-1} [R] [T] = \begin{bmatrix} [P(\theta)]^{-1} [R_s] [P(\theta)] & \vdots & [0] \\ \dots & \dots & \dots \\ [0] & \vdots & [R_r] \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 B &= [T]^{-1} [L] \frac{d[T]}{dt} = \begin{bmatrix} [P(\theta)]^{-1} [L_s] \frac{dy}{dx} & \vdots & [P(\theta)] \\ \dots & \dots & \dots \\ [M_{sr}] \frac{d[P(\theta)]}{dt} & \vdots & [0] \end{bmatrix} \\
 C &= [T]^{-1} [L] \frac{d[T]}{dt} = \begin{bmatrix} [0] & \vdots & [P(\theta)]^{-1} \frac{d[M_{sr}]}{dt} \\ \dots & \dots & \dots \\ [P(\theta)] \frac{d[M_{sr}]}{dt} & \vdots & [0] \end{bmatrix} \\
 C &= [T]^{-1} [L] \frac{d[T]}{dt} = \begin{bmatrix} [0] & \vdots & [P(\theta)]^{-1} \frac{d[M_{sr}]}{dt} \\ \dots & \dots & \dots \\ [P(\theta)] \frac{d[M_{sr}]}{dt} & \vdots & [0] \end{bmatrix} \\
 D &= [T]^{-1} [L][T] = \begin{bmatrix} [P(\theta)]^{-1} [L_s][P(\theta)] & \vdots & [P(\theta)]^{-1} [M_{sr}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [M_{sr}]^T [P(\theta)] & \vdots & [L_r] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La mise en équation du modèle de la machine conduit à un système complet de dimension $Nr+4$:

$$\begin{bmatrix} V_{ds} \\ V_{qs} \\ V_{os} \\ \dots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = [R_{tr}] \begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \\ I_{os} \\ \dots \\ I_{r_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{r(N_r-1)} \\ \dots \\ I_e \end{bmatrix} + [L_{tr}] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \\ I_{os} \\ \dots \\ I_{r_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{r(N_r-1)} \\ \dots \\ I_e \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

$[L_{tr}]$ et $[R_{tr}]$ sont les matrices globales des résistances et des inductances après la transformation de Park. A ces équations, on ajoute les équations électromagnétiques (II.28) et (II.29) afin d'avoir la vitesse électrique et la position électrique θ_r du rotor.

$$\frac{d\Omega_r}{dt} = \frac{1}{J} (C_e - C_r - k_0 \Omega_r) \quad (\text{II.28})$$

$$\frac{d}{dt}\theta_r = \Omega_r \quad (\text{II.29})$$

II.4.5. Equation mécanique de la machine

La puissance absorbée de la machine asynchrone s'écrit :

$$P_e = V_a i_a + V_b i_b + V_c i_c = V_{ds} i_{ds} + V_{qs} i_{qs} + V_{os} i_{os}$$

Posons :

$$\begin{bmatrix} X_{dq0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_d \\ X_q \\ X_0 \end{bmatrix} et \begin{bmatrix} X_{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \\ X_c \end{bmatrix}$$

Avec $X = (i, V, \Phi)$ et Φ est le flux d'induction totalisé dans l'enroulement. Soit (P) la matrice de transformation directe, de telle sorte que :

$$\begin{bmatrix} X_{dq0} \end{bmatrix} = [P] \cdot \begin{bmatrix} X_{abc} \end{bmatrix}$$

Dans ces conditions, la puissance instantanée a pour expression :

$$[P_e] = [v_{abc}]^t [i_{abc}] = [v_{dq0}]^t [I_{dq0}] \quad (\text{II.30})$$

$$[V_{dq0}] = [R_s] \cdot [i_{dq0}] + \frac{d}{dt} [\Phi_{dq0}] + [P] \frac{d[P]^{-1}}{dt} [\Phi_{dq0}] \quad (\text{II.31})$$

$$\begin{cases} V_{ds} = R_s I_{ds} + \frac{d}{dt} \Phi_{ds} - \omega_s \Phi_{qs} \\ V_{qs} = R_s I_{qs} + \frac{d}{dt} \Phi_{qs} + \omega_s \Phi_{ds} \\ V_{os} = R_s I_{os} + \frac{d}{dt} \Phi_{os} \end{cases}$$

la puissance dissipée en pertes Joule est :

$$P_j = R_s (I_{ds}^2 + I_{qs}^2)$$

la puissance représentant les échanges d'énergie électromagnétique est :

$$P_v = I_{ds} \cdot \left(\frac{d\Phi_{ds}}{dt} \right) + I_{qs} \cdot \left(\frac{d\Phi_{qs}}{dt} \right)$$

La puissance mécanique P_m est :

$$P_m = \omega (\Phi_{ds} I_{qs} - \Phi_{qs} I_{ds})$$

Or la puissance mécanique est égale à $C_e \Omega$. On en tire l'expression scalaire du couple.

$$C_e = P [\Phi_{ds} I_{qs} - \Phi_{qs} I_{ds}] \quad (\text{II.32})$$

On remplace Φ_{ds} et Φ_{qs} par ces expressions et on obtient :

$$C_e = \frac{3}{2} p M_{sr} \left\{ I_{ds} \sum_k^{N_r-1} I_{r(k)} \sin(k.\alpha) - I_{qs} \sum_k^{N_r-1} I_{r(k)} \cos(k.\alpha) \right\} \quad (\text{II.33})$$

II.5. Modèle de taille réduite

La représentation du système par l'expression (II.27) fait apparaître un système d'ordre très élevé car il est constitué de nombre de phases statoriques, du nombre de phases rotoriques et des équations électromécaniques.

Nous avons appliqué une transformation de Park étendue au système rotorique de manière à transformer ce système à N_r phases en un système (d, q).

Nous pouvons définir un vecteur d'état $[X]$ qui, après l'application de cette matrice de transformation, donnera :

$$\begin{aligned} [X_{odqs}] &= [T(\theta_s)] [X_{abcs}] \rightarrow [X_{abcs}] = [T(\theta_s)]^{-1} \cdot [X_{odqs}] \\ [X_{odqr}] &= [T_{3N_r}(\theta_r)] [X_{r(k)}] \rightarrow [X_{r(k)}] = [T_{3N_r}(\theta_r)]^{-1} \cdot [X_{odqr}] \end{aligned}$$

II.5.1. Stator

$$[V_s] = [R_s] [i_s] + \frac{d}{dt} \{ [L_s] \cdot [i_s] \} + \frac{d}{dt} \{ [M_{sr}] [i_{rk}] \} \quad (\text{II.34})$$

L'application de la transformation donne :

$$\begin{aligned} [V_{odqs}] &= \left\{ [T(\theta_s)] [R_s] [T(\theta_s)]^{-1} \right\} [i_{odqs}] + \left\{ [T(\theta_s)] [L_s] [T(\theta_s)]^{-1} \right\} \frac{d}{dt} [i_{odqs}] + \\ &\left\{ [T(\theta_s)] \frac{d}{dt} \left\{ [M_{sr}] [T_{3N_r}(\theta_r)]^{-1} \right\} \right\} [i_{odqr}] + \left\{ [T(\theta_s)] [L_s] \frac{dy}{dx} [T(\theta_s)]^{-1} \right\} [i_{odqs}] + \\ &\left\{ [T(\theta_s)] [M_{sr}] T_{3N_r}(\theta_r)^{-1} \right\} \frac{d}{dt} [i_{odqr}] + \end{aligned}$$

II.5.2. Rotor

$$[V_r] = [R_r] [i_{rk}] + \frac{d}{dt} \{ [L_r] \cdot [i_{rk}] \} + \frac{d}{dt} \{ [M_{rs}] [i_s] \} \quad (\text{II.35})$$

Nous obtenons de la même façon :

$$\begin{aligned} [V_{odqr}] &= \left\{ [T(\theta_r)] [R_r] [T(\theta_r)]^{-1} \right\} [i_{odqr}] + \left\{ [T(\theta_r)] [L_r] [T(\theta_r)]^{-1} \right\} \frac{d}{dt} [i_{odqr}] + \\ &\left\{ [T(\theta_r)] [M_{rs}] \frac{d}{dt} [T(\theta_r)]^{-1} \right\} \frac{d}{dt} [i_{odqr}] + \left\{ [T(\theta_r)] \frac{d}{dt} [M_{sr}] T(\theta_s)^{-1} \right\} [i_{odqs}] \end{aligned}$$

En choisissant un référentiel lié au rotor, les relations angulaires peuvent s'écrire $\theta_s = \theta_r$ et $\theta_R = 0$.

Après simplifications, nous obtenons un modèle de taille réduite pour la machine asynchrone. suivante :

$$\begin{bmatrix} L_{sc} \cdot I_2 & -\frac{N_r}{2} M_{sr} \cdot I_2 & \vdots & 0 \\ -\frac{3}{2} M_{sr} \cdot I_2 & L_{rdq} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & L_e \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{dqs} \\ i_{dqr} \\ \dots \\ i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{dqs} \\ V_{dqr} \\ \dots \\ V_e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_s \cdot I_2 + \omega_r L_{sc} \cdot J_2 & -\frac{N_r}{2} \omega_r M_{sr} \cdot J_2 & \vdots & 0 \\ 0 & R_{rdq} \cdot I_2 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & R_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{dqs} \\ i_{dqr} \\ \dots \\ i_e \end{bmatrix} \quad (\text{II.36})$$

Avec :

$$L_{rdq} = L_{rp} - M_{rr} + \frac{2 \cdot L_e}{N_r} + 2 \cdot L_e (1 - \cos(a)) \quad (\text{II.37})$$

$$R_{rdq} = 2 \frac{R_e}{N_r} + 2 \cdot R_b (1 - \cos(a)) \quad (\text{II.38})$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'un défaut rotorique, la matrice $[R_r]$ doit être modifiée. En utilisant la matrice de transformation, nous obtenons une matrice d'ordre deux pour le rotor.

La matrice de défaut rotorique s'écrit :

$$[R_{rf}] = [R] + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & \dots & & & & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ & \dots & & & & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & R'_{bk} & -R'_{bk} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -R'_{bk} & R'_{bk} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

La nouvelle matrice des résistances rotorique, après transformations, devient :

$$[R_{rfdq}] = [T(\theta_R)] [R_{rf}] [T(\theta_R)]^{-1} = [T(\theta_R)] \{ [\theta_R] + [R'_r] \} [T(\theta_R)]^{-1}$$

La matrice résistance est :

$$\begin{bmatrix} R_{rdd} & R_{rdq} \\ R_{rqd} & R_{rqq} \end{bmatrix}$$

Où les quatre termes de cette matrice sont :

$$\begin{aligned} R_{rdd} &= 2.R_b (1 - \cos(a)) + 2 \frac{R_e}{N_r} + \frac{2}{N_r} (1 - \cos(a)) \sum_k R_{bfk} (1 - \cos(2k-1)a) \\ R_{rdq} &= -\frac{2}{N_r} (1 - \cos(a)) \sum_k R_{bfk} (1 - \sin(2k-1)a) \\ R_{rqd} &= -\frac{2}{N_r} (1 - \cos(a)) \sum_k R_{bfk} (1 - \sin(2k-1)a) \\ R_{rqq} &= 2.R_b (1 - \cos(a)) + 2 \frac{R_e}{N_r} + \frac{2}{N_r} (1 - \cos(a)) \sum_k R_{bfk} (1 - \cos(2k-1)a) \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

K : la barre cassée

Equation mécanique transformée

Pour la partie mécanique, après l'application de la transformation généralisée sur l'expression du couple, on obtient :

$$C_e = \frac{2}{3} \cdot p \cdot N_r \cdot M_{sr} (I_{ds} I_{qs} - I_{qs} I_{dr}) \quad (\text{II.41})$$

La sous-matrice, relative à la résistance rotorique, est un bon indicateur de la présence d'un défaut. En effet, en cas de défaut R_{dd} et R_{qq} ne sont plus égaux comme c'est le cas pour la machine saine. En outre, les termes R_{dq} et R_{qd} prennent une valeur non nulle, ce qui témoigne de la présence d'un défaut au rotor.

II.6. Simulation du modèle réduit de la machine asynchrone

Pour simuler le modèle de taille réduite, nous pouvons aborder la simulation de celle-ci en utilisant MATLAB/SIMILINK. Cela permet de mettre en évidence le comportement du moteur asynchrone dans le cas où le rotor est sain et dans le cas où le rotor est défaillant.

II.6.1. Résultats de simulation

Les paramètres de la machine utilisée en simulation sont donnés en annexe A.

II.6.1.1. Cas d'une machine saine en charge

Pour observer le comportement du modèle simulé, un couple de 3.5 Nm est appliqué à la machine à l'instant $t=0.6s$. Ce couple représente le couple nominal de la machine réelle étudiée.

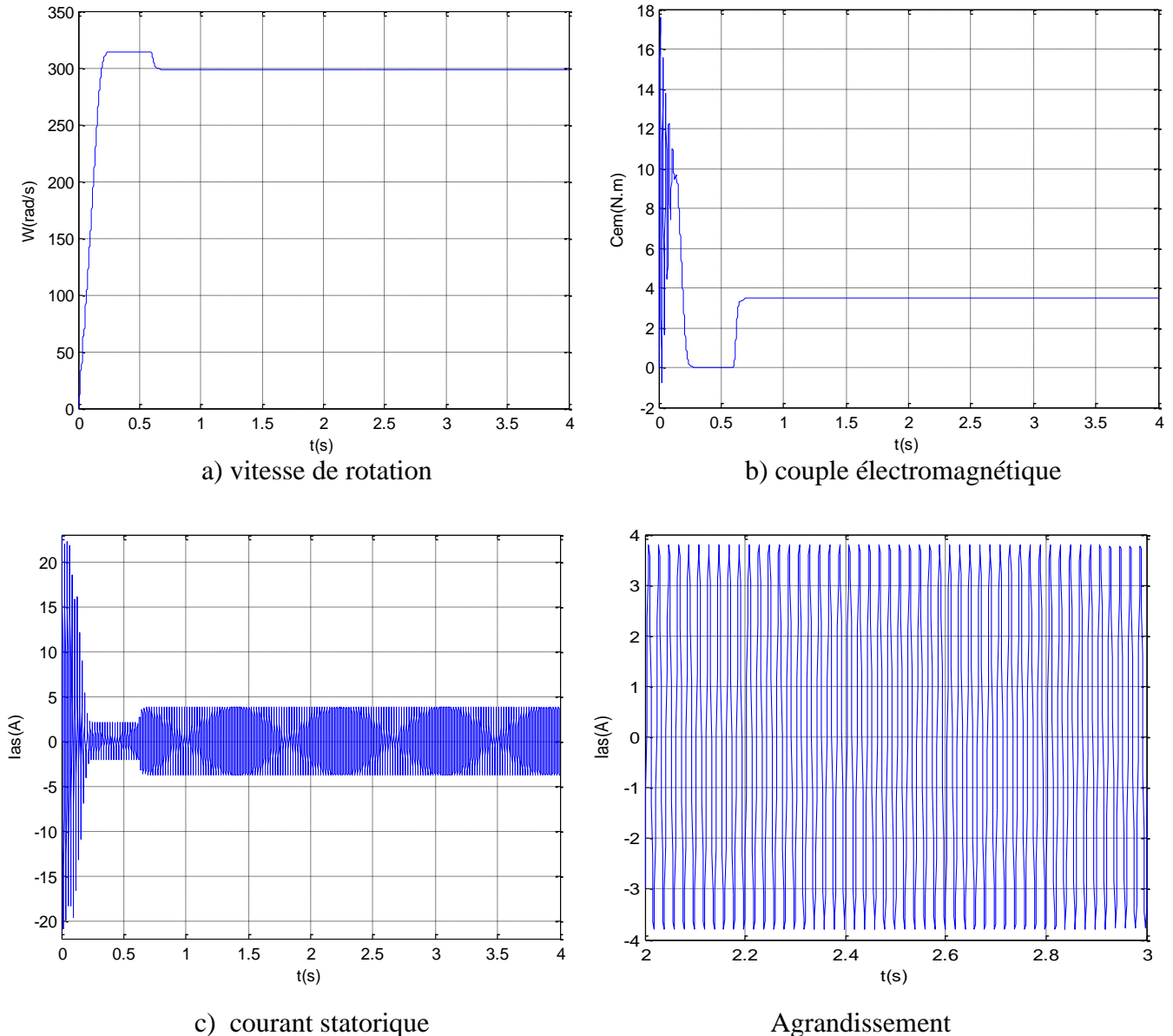


Figure 2.6 : Simulation avec modèle réduit : en charge ($C_r=3.5N.m$) machine saine.

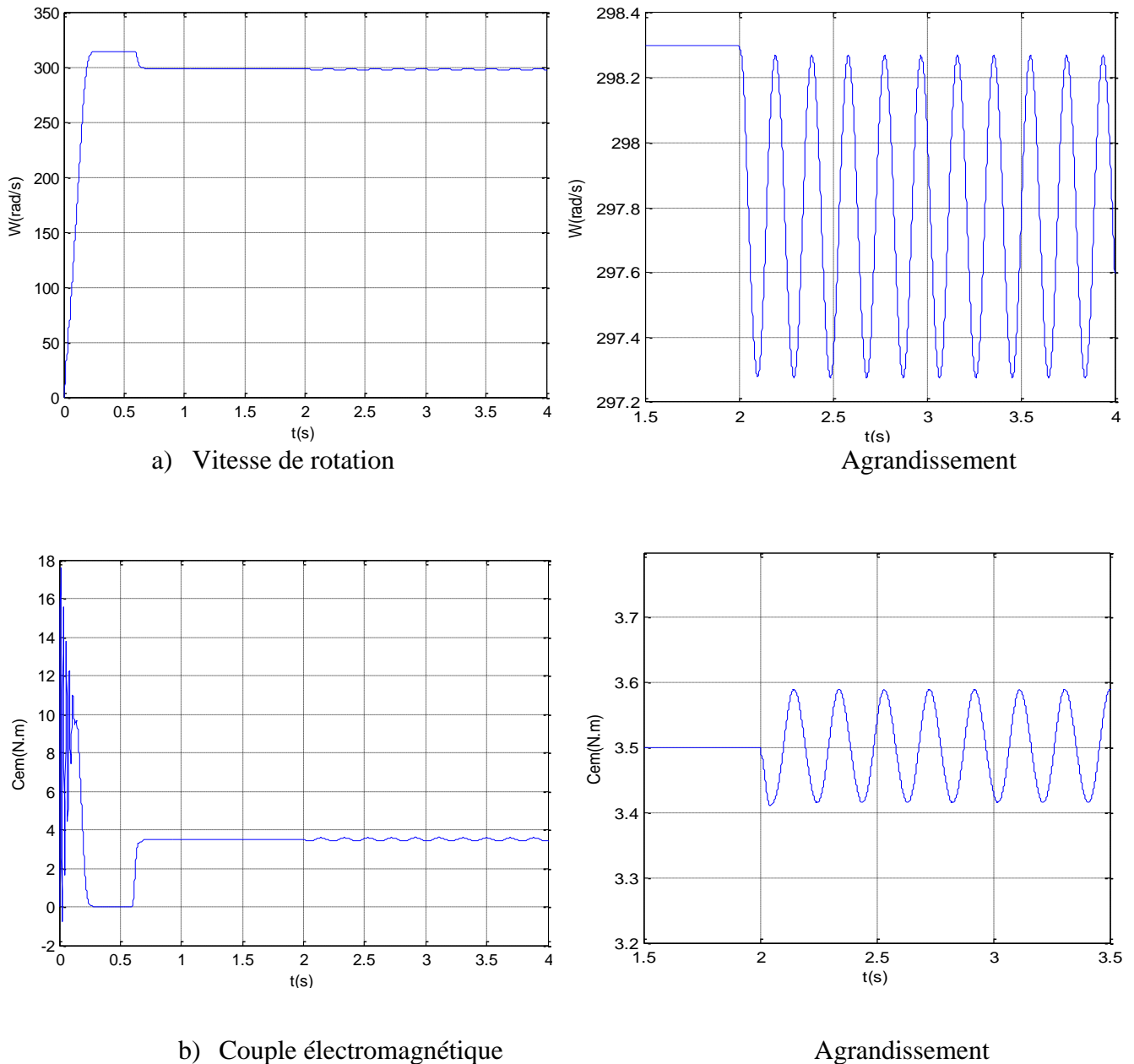
- **Interprétation des résultats :**

A l'instant $t=0.6s$, nous appliquons un couple résistant $C_r=3.5 N.m$. La Figure (2-6) montre l'évolution du couple électromagnétique, de la vitesse et du courant statorique. Les formes des graphes montrent qu'en phase de démarrage le moteur subit un allongement du régime transitoire. A titre d'exemple, nous prenons la courbe du couple électromagnétique. Cette dernière comprend au début une série d'oscillations d'amplitude élevées qui s'amortissent au cours de l'accélération du moteur, à la fin du régime de démarrage (0.35s. Figure 2-6-b). Le couple atteint sa valeur maximale, puis s'atténue pour atteindre la valeur du couple résistant.

II.6.1.2. Cas d'une cassure d'une barre

Dans la simulation suivante, on va supposer un défaut (rupture de barre 1 à $t=2s$):

La Figure 2.7 montre l'évolution du courant statorique, du couple électromagnétique, la vitesse, en charge et lors de la rupture de la première barre. Le démarrage s'effectue à vide sous tension nominale avec une alimentation équilibrée. La machine était initialement saine et chargée $C_r=3.5$ N.m à l'instant $t=0.6s$.



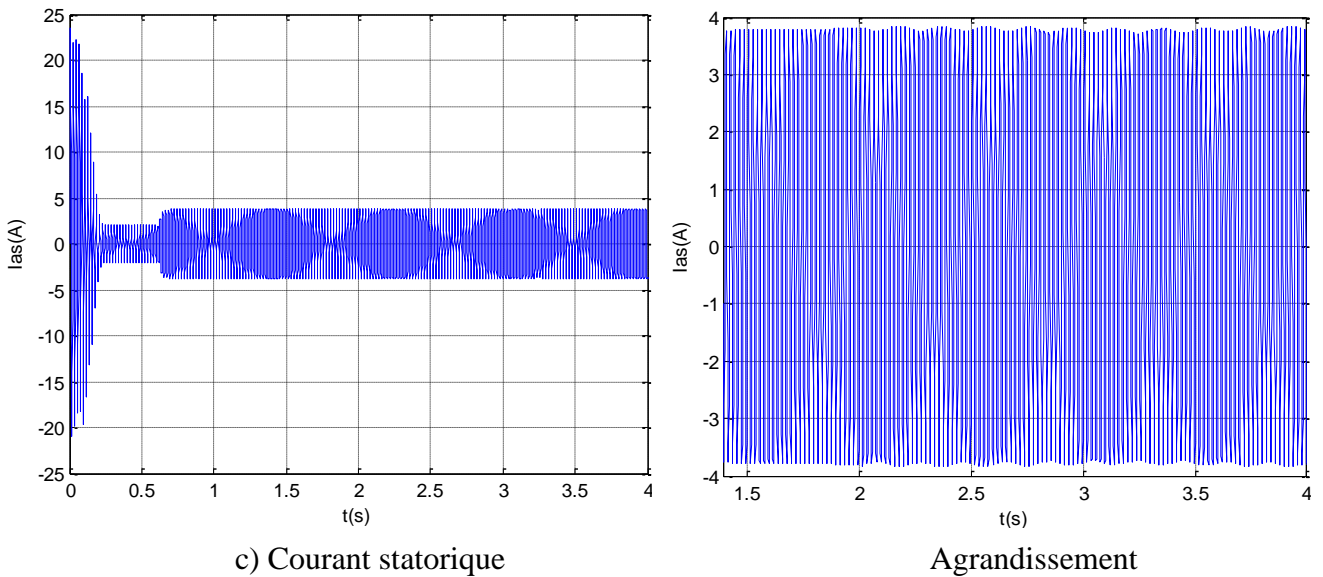


Figure 2.7 : Simulation avec modèle réduit : en charge ($C_r=3.5\text{N.m}$) avec rupture d'une barre.

• **Interprétation des résultats :**

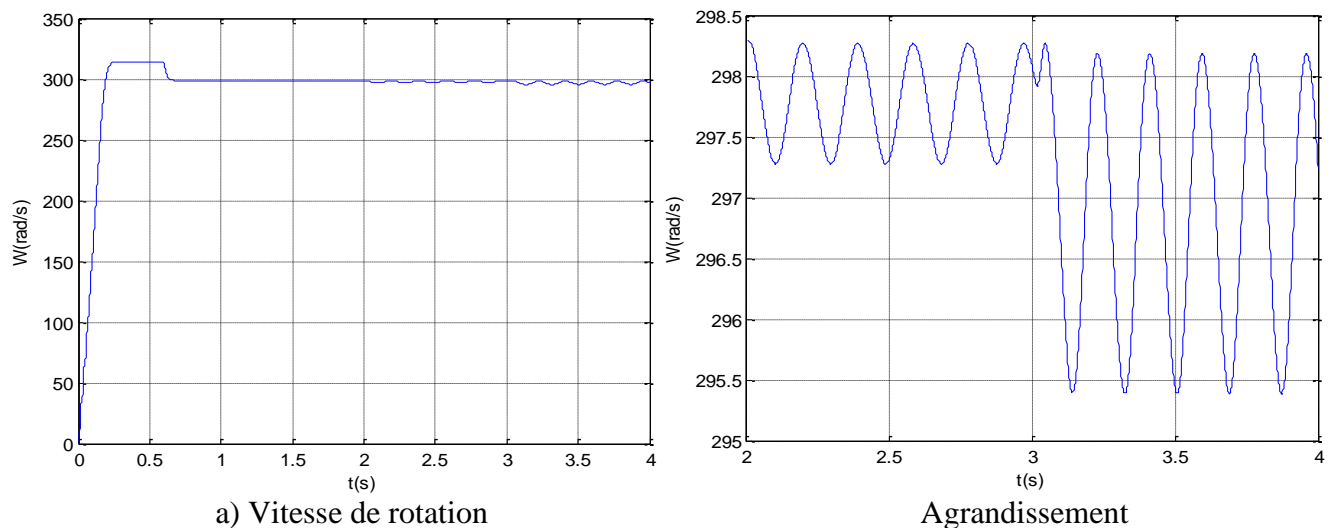
La Figure (2.7-a-b). illustre l'évolution temporelle en régime transitoire et en régime permanent de la vitesse de rotation, celle-ci se stabilise à une valeur de 300 rad/s. La figure illustre aussi du couple électromagnétique en présence d'une rupture des barres à $t=2\text{s}$. Après une phase transitoire, celui-ci se stabilise à une valeur proche de (3.5 N. m) à cause de la présence du couple de charge, on remarque des oscillations après la rupture de la barre. La Figure (2.7-c) illustre l'évolution temporelle en régime transitoire et en régime permanent du courant statorique.

II.6.1.3. Cas d'une cassure de deux barres adjacentes

Dans la simulation suivante, on va supposer deux défauts : rupture de deux barres adjacentes:

- rupture de la barre 1 à $t=2\text{s}$,
- rupture de la barre 2 à $t=3\text{s}$.

La machine était initialement saine et chargée $C_r=3.5\text{ N.m}$.



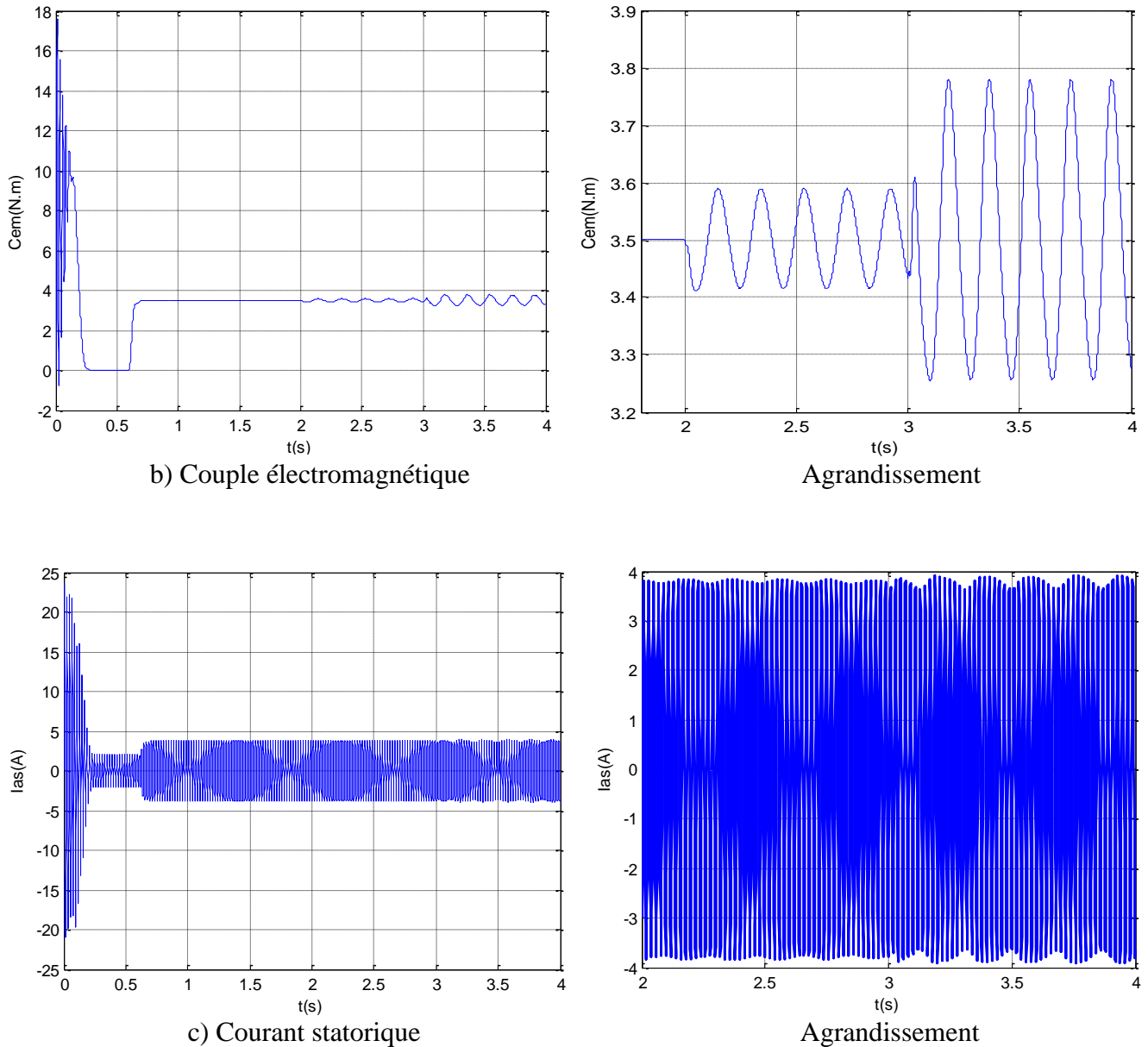


Figure 2.8 : Simulation avec modèle réduit: en charge ($C_r=3.5$ Nm), avec rupture de deux barres adjacentes à $t=2$ s et $t=3$ s.

- **Interprétation des résultats :**

A l'instant $t=0.6$ s, la machine a été soumise à un couple résistant nominal $C_r=3.5$ N.m. Le couple électromagnétique répond pour équilibrer le couple résistant, la vitesse chute alors à la valeur de 300 rad/s et le courant augmente et atteint sa valeur nominale:

- Pour simuler la rupture de la 1^{ère} barre, on augmente sa résistance de 11 fois. Il s'ensuit une augmentation de la valeur efficace du courant dans les barres voisines de la barre cassée.
- Les défauts de rupture de barres se traduisent : dans les courbes du courant statorique : par l'apparition d'une modulation d'amplitude,

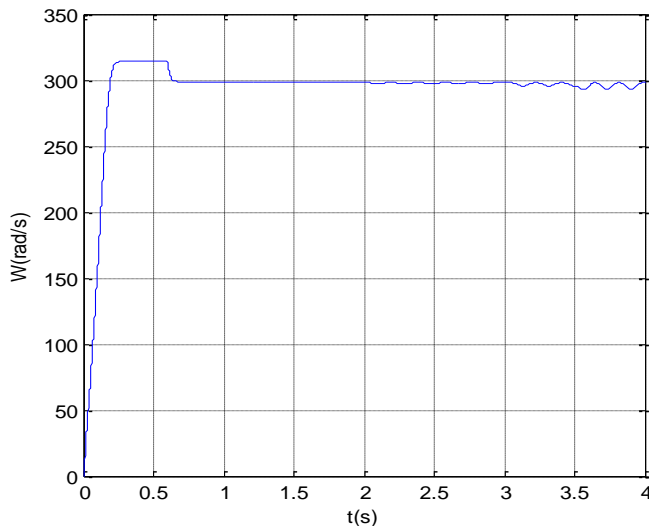
- Au moment de l'apparition du défaut, les grandeurs électriques sont caractérisées, par rapport au régime normal, par des variations brusques.

II.6.1.4. Cas d'une cassure de trois barres adjacentes

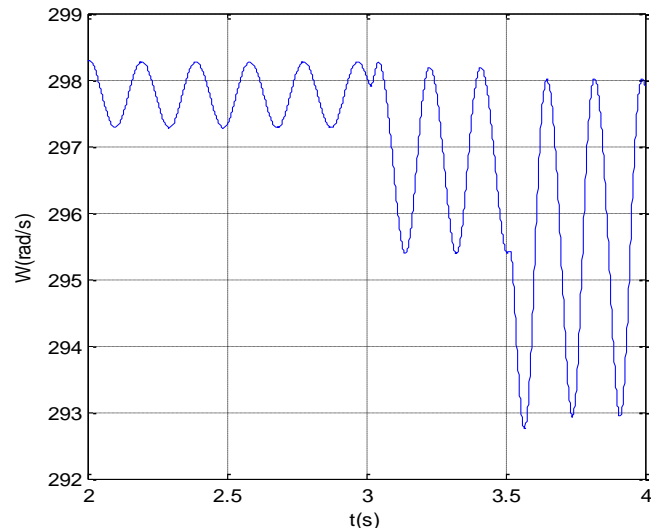
Dans la simulation suivante, on va supposer trois défauts : rupture de trois barres adjacentes :

- rupture de la barre 1 à $t=2s$,
- rupture de la barre 2 à $t=3s$,
- rupture de la barre 3 à $t=3.5s$.

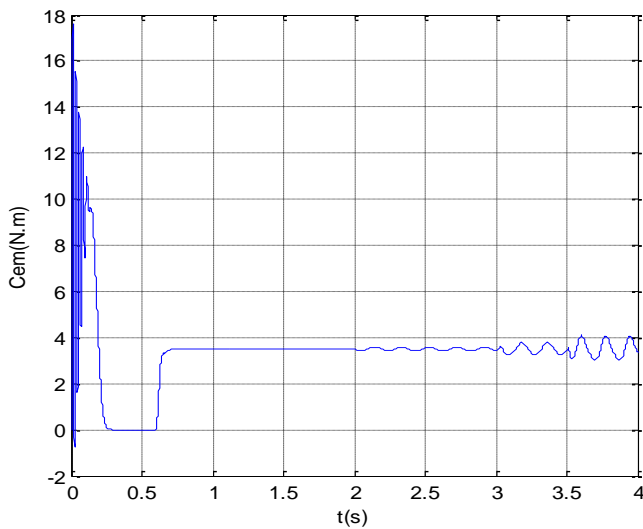
La machine était initialement saine et chargée $C_r=3.5$ N.m.



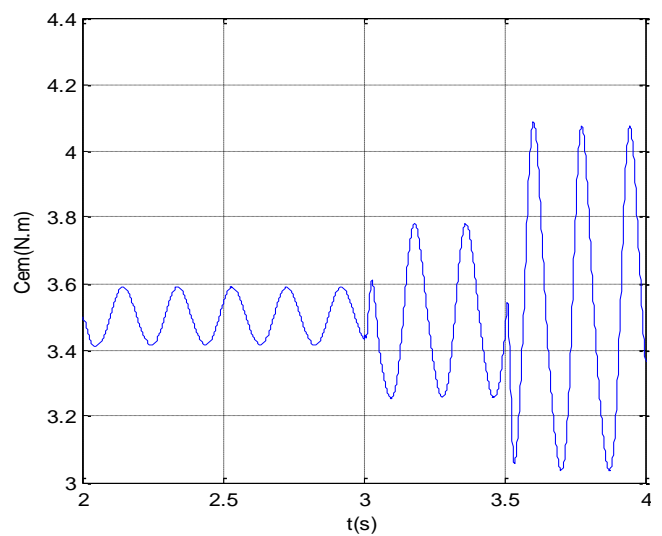
a) Vitesse de rotation



Agrandissement



b) Couple électromagnétique



Agrandissement

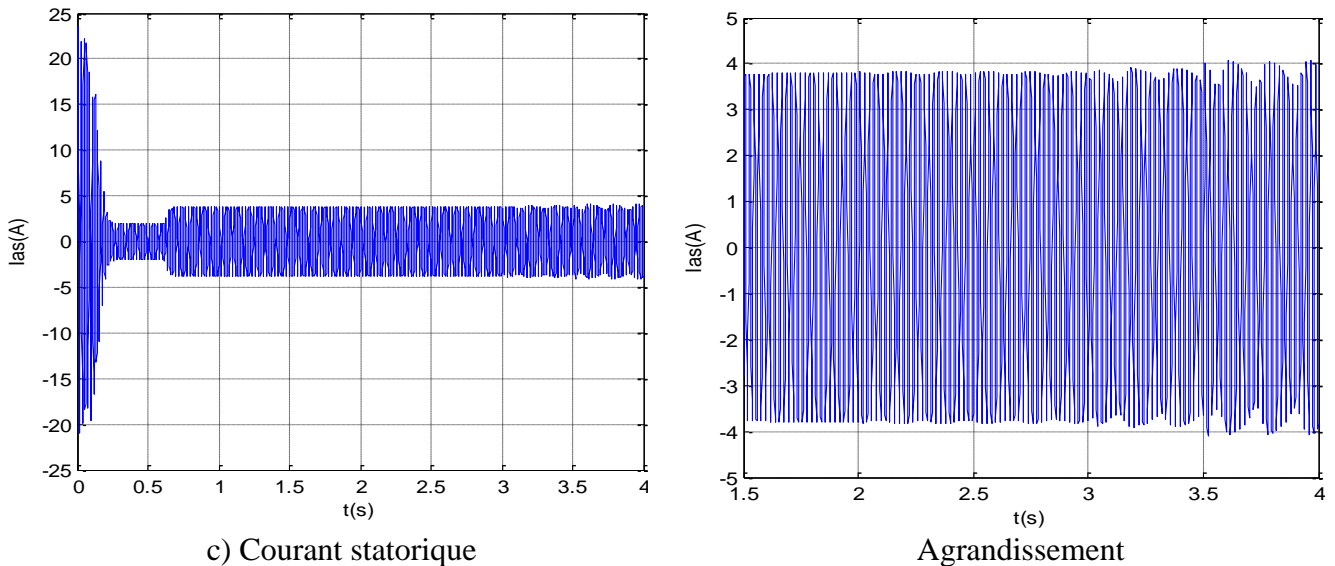


Figure 2.9 : Simulation avec le modèle réduit: en charge ($C_r=3.5\text{Nm}$), avec rupture de trois barres adjacentes à $t=2\text{s}$ et $t=3\text{s}$ et $t= 3.5\text{s}$.

- **Interprétation des résultats :**

Les défauts de rupture de barres se traduis est :

- dans les courbes du courant statorique : par l'apparition d'une modulation d'amplitude,
- Pour simuler la rupture de la 1^{ère} barre, on augmente sa résistance de 11fois. Il s'ensuit une augmentation de la valeur efficace du courant dans les barres voisines de la barre cassée. Le phénomène est d'autant plus remarquable que les barres cassées sont espacées et que leur nombre est relativement grand,
- Au moment de l'apparition du défaut, les grandeurs électriques sont caractérisées, par rapport au régime normal, par des variations brusques.

II.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le développement mathématique d'un modèle multi-enroulement qui prend en considération la structure du rotor. On a traité la machine asynchrone en terme de circuit, et on a considéré que le rotor est constitué de plusieurs éléments, chaque élément de la cage est décrit par un circuit électrique équivalent de N_r grandeurs. Puis, on a fait la transformation de N_r grandeurs vers deux grandeurs, pour faciliter l'étude. nous avons présenté une simulation d'un moteur asynchrone triphasé à cage, alimentée directement par un réseau standard, on alimente la machine par une source de tension sinusoïdale de valeur efficace 220V et de fréquence 50HZ, par l'application de la transformation de PARK qui ramène le modèle triphasé en un modèle diphasé équivalent nous avons trouvé que la rupture d'une barre provoque des oscillations dans le couple et dans la vitesse, ainsi qu'une

modulation de l'enveloppe du courant statorique. L'amplitude de ces oscillations augmente avec le nombre de barres casées. Nous avons remarqué que la durée du régime transitoire augmente avec la sévérité du défaut de barres. Nous avons constaté aussi que les effets de cassures de barres peuvent être inobservables, lorsque la machine fonctionne à vide ou à des faibles glissements.

Le modèle constitué donne des résultats identiques à ceux obtenus dans le cas du modèle classique de la machine asynchrone et permet d'étudier les différents défauts rotoriques, donc ce modèle s'adapte bien au problème posé.

Pour le troisième chapitre on doit appliquer la commande par mode glissant à la machine asynchrone en tenant compte des défauts rotoriques.

